Энергия упругой волны

Уравнение упругой волны:

$$\xi = a\cos(\omega t - kx + \varphi) \tag{1}$$

Рассмотрим элементарный объем ΔV такой, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = const; \;\; \frac{\partial \xi}{\partial x} = const \tag{2}$$

Выведем кинетическую энергию выделенного объема:

$$\Delta W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho \Delta V}{2}(\frac{\partial \xi}{\partial t})^2 \tag{3}$$

Теперь выведем потенциальную энергию:

$$\Delta W_{\text{п}} = \frac{k\Delta l^2}{2} = \{\varepsilon = \frac{\Delta l}{L},\ k = \frac{ES}{L}\} = \frac{ES}{L}\frac{(\varepsilon L)^2}{2} = \frac{ESL}{2}\varepsilon^2 = \frac{ESL}{2}(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 = \frac{E}{2}(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2\Delta V \tag{4}$$

Отсюда потенциальная энергия данного объема:

$$\Delta W_{\text{п}} = \frac{\rho v^2}{2}(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2\Delta V \tag{5}$$

Найдем полную энергию:

$$\Delta W = \Delta W_{\text{к}} + \Delta W_{\text{п}} = \frac{1}{2}\rho[(\frac{\partial \xi}{\partial t})^2 + v^2(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2]\Delta V \tag{6}$$

Получим плотность энергии $w = \frac{\Delta W}{\Delta V}$:

$$w = \frac{1}{2}\rho[(\frac{\partial \xi}{\partial t})^2 + v^2(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2] \tag{7}$$

Подставим в выражение для плотности энергии производные ξ:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = ka\sin(\omega t - kx + \varphi) \tag{8}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -a\omega\sin(\omega t - kx + \varphi) \tag{9}$$

Получится это:

$$w = \rho a^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx + \varphi) \tag{10}$$

Поскольку $< \sin^2 t >= \frac{1}{2}$, среднее по времени значение плотности энергии равно:

$$< w >= \frac{1}{2}\rho a^2\omega \tag{11}$$

Потоком энергии называется производная от энергии по времени:

$$\Phi = \frac{dW}{dt} \tag{12}$$

Рассматривают также плотность потока энергии. Она равна отношению величины потока через перпендикулярную ему поверхность к площади этой поверхности (обозначается j):

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta S_\perp} = \frac{\Delta W}{\Delta S_\perp \Delta t} = j \tag{13}$$

Выразим j через фазовую скорость (ΔV – объем косого цилиндра, длину высоты которого волна, двигаясь с фазовой скоростью Δv проходит за Δt):

$$\Delta W = w\Delta V = w\Delta S_\perp v\Delta t \tag{14}$$

Отсюда:

$$j = \frac{\Delta W}{\Delta S_\perp \Delta t} = wv \tag{15}$$

Скорость – вектор, поэтому j тоже может быть вектором:

$$\vec{j} = w\vec{v} \tag{16}$$

Он называется вектором Умова.

Через среднее значение плотности энергии можно выразить среднее значение вектора Умова:

$$< \vec{j} >=< w > v = \frac{1}{2}\rho a^2 \omega^2 \vec{v} \tag{17}$$

Поток вектора Умова через поверхность есть поток энергии через нее:

$$\Phi = \int_S \vec{j} d\vec{S} \tag{18}$$

Аналогично для среднего потока энергии:

$$< \Phi >= \int_S \vec{j} d\vec{S} \tag{19}$$

Рассмотрим специально случай сферической волны. Вектор Умова для нее всюду перпендикулярен волновой поверхности. Найдем средний поток энергии:

$$< \Phi >= \int_S < j > dS_n =< j > S =< j > 4\pi r^2 = 2\pi\rho\omega^2 v a_r^2 r^2 \tag{20}$$

Здесь a_r – амплитуда на расстоянии r от источника. Если энергия не поглащается средой, то $< \Phi >= const$, поэтому:

$$a_r^2 r^2 = const, \;\; a_r \sim \frac{1}{r} \tag{21}$$

Если среда поглащает энергию, присутствует затухание вектора Умова:

$$< j >= j_0 e^{-kx}, \;\; k = 2\gamma \tag{22}$$

(γ – коэффициент поглащения)